

# **Einsatz von Varianzreduktionstechniken in aktuellen Simulationswerkzeugen**

## ***Using Variance Reduction Techniques with State-of-the-Art Simulation Systems***

Sven Völker, Hochschule Ulm, Ulm (Germany), voelker@hs-ulm.de

Kai Gutenschwager, Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften,  
Wolfenbüttel (Germany) und SimPlan AG, Niederlassung Braunschweig  
(Germany), k.gutenschwager@ostfalia.de

Peter-Michael Schmidt, Siemens Industry Software GmbH, Stuttgart (Germany),  
petermichael.schmidt@siemens.com

**Abstract:** Variance reduction techniques are a means to reduce computational costs in simulation studies. The paper analyses five state-of-the-art simulation systems regarding their capability to apply two different variance reduction techniques, namely Common Random Numbers and Antithetic Variates. One of these tools, Plant Simulation, is used to apply both variance reduction techniques to four simulation models of different complexity.

## **1 Einleitung**

Der zeitliche Aufwand für die Durchführung von Simulationsläufen ist auch heute noch ein relevanter Aspekt in der Experimentplanung. Varianzreduktionstechniken (VRT) sind ein Ansatz zur Verringerung des Rechenaufwands. Bisherige Veröffentlichungen zu VRT befassen sich vorrangig mit der Frage, wie stark sich die Varianz einer Ausgangsgröße bei einer gegebenen Anzahl von Simulationsläufen reduzieren lässt. Sie zeigen, dass der Einsatz von VRT im Bereich der Materialfluss- und Logistiksimulation in bestimmten Konstellationen vorteilhaft ist (Cole et al. 2007; Adewunmi 2010; Ünlü und Rossetti 2011). Allerdings fehlen in der Fachliteratur systematische Aussagen darüber, was bei der Anwendung von VRT im Kontext konkreter Simulationswerkzeuge zu beachten ist und welche Simulationswerkzeuge den Einsatz von VRT überhaupt ermöglichen. Der Beitrag behandelt die VRT „Gemeinsame Zufallszahlen“ und „Antithetische Variablen“. Es wird untersucht, welche Eigenschaften die simulierten Systeme aufweisen müssen, welche Simulationswerkzeuge den Einsatz der beiden Techniken ermöglichen und wie bei der Modellierung vorzugehen ist. Mit Hilfe des Simulationswerkzeugs Plant Simulation werden die VRT exemplarisch auf vier Produktions- und Logistik-

systeme unterschiedlicher Struktur und Komplexität angewandt. Außer Plant Simulation werden auch die Simulationswerkzeuge AnyLogic, AutoMod, Enterprise Dynamics und Witness hinsichtlich ihrer Eignung für den Einsatz von VRT betrachtet.

## 2 Grundlagen der Varianzreduktion

Die Abbildung der stochastischen Eingangsgrößen eines Simulationsmodells erfolgt mit Hilfe von Zufallszahlengeneratoren, die zufällig erscheinende Zahlenfolgen erzeugen. Da in der Regel Zufallszahlen für verschiedene Verteilungen benötigt werden, kommt ein zweistufiges Verfahren zum Einsatz: Im ersten Schritt werden im Intervall  $[0,1]$  möglichst gleichverteilte Zufallszahlen produziert, so genannte Standardzufallszahlen. Dies geschieht mit Verfahren wie dem Multiplicative Linear Congruential Generator (MLCG, z. B. L'Ecuyer 1999) oder dem Multiple Recursive Generator (MRG, z. B. L'Ecuyer und Granger-Piché 2003). Die Standardzufallszahlen werden im zweiten Schritt in die gewünschte Verteilung transformiert, wobei verschiedene Verfahren angewendet werden können (Law 2014, S. 426 ff.). Im einfachsten Fall, der Inversionsmethode, wird eine Standardzufallszahl in die inverse Verteilungsfunktion der gewünschten Verteilung eingesetzt (Bratley et al. 1983, S. 25 ff.). Es existieren aber auch Verfahren, die mehrere, teilweise auch eine nicht konstante Anzahl Standardzufallszahlen zur Berechnung einer Zufallszahl der gewünschten Verteilung benötigen. Dies gilt z. B. für die Annahme-Verwerfungsmethode (Kolonko 2008, S. 97 ff.). Als Maß für die statistische Sicherheit ist meist entweder das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Beobachtungsgröße oder das Konfidenzintervall um die Differenz der Beobachtungsgröße zwischen zwei verschiedenen Systemkonfigurationen relevant. VRT sollen die Breiten dieser Konfidenzintervalle reduzieren.

*Gemeinsame Zufallszahlen* (Common Random Numbers, CRN) werden eingesetzt, um zwei Konfigurationen eines betrachteten Systems miteinander zu vergleichen. Der Vergleich der Systemkonfigurationen erfolgt mit dem Paired- $t$ -Konfidenzintervall der interessierenden Ausgangsgröße (z. B. Hedderich und Sachs 2016, S. 523 ff.). Die Grundidee von CRN ist folgende: Wird mit jeder der zu vergleichenden Konfigurationen ein Simulationslauf durchgeführt, können die beobachteten Unterschiede in der Ausgangsgröße sowohl auf der unterschiedlichen Systemkonfiguration beruhen als auch zufällig sein. Werden in beiden Simulationsläufen exakt dieselben Zufallszahlen zum jeweils selben Zweck verwendet, sollte der Unterschied nur noch aus der Systemkonfiguration resultieren. CRN setzt voraus, dass die Beobachtungsgröße für die zu vergleichenden Systemkonfigurationen in prinzipiell gleicher Weise von den verwendeten Zufallszahlen abhängt. Ist beispielsweise die Zwischenankunftszeit von Aufträgen die zufällige Eingangsgröße und die Auftragsdurchlaufzeit die Beobachtungsgröße, kann für nahezu jedes logistische System unterstellt werden, dass kleine Zufallszahlen zu langen Durchlaufzeiten führen und umgekehrt. Unterscheidet sich die Wirkungsrichtung zwischen den beiden Konfigurationen, kann CRN die Varianz auch vergrößern. Zu umfassenden Erläuterungen der Methode sowie ihren mathematischen Grundlagen sei auf Law (2007), S. 578 ff., und Bratley et al. (1983), S. 44 ff., verwiesen.

*Antithetische Variablen* (AV) dienen im Unterschied zu CRN der Untersuchung einer Konfiguration des betrachteten Systems. Statt mehreren unabhängigen Simula-

tionsläufen werden jeweils Paare von Simulationsläufen durchgeführt, wobei im ersten Lauf eine Folge von Standardzufallszahlen ( $u_i$ ) und im zweiten Lauf die Folge  $(1 - u_i)$  verwendet wird. Es wird nun erwartet, dass kleine Beobachtungswerte im ersten Lauf mit großen Beobachtungswerten im zweiten Lauf korrespondieren und umgekehrt. Aufgrund dieser negativen Korrelation liegt der Mittelwert beider Beobachtungen näher am Erwartungswert der Beobachtungsgröße als der Durchschnitt der Mittelwerte zweier unabhängiger Läufe. Dadurch verringert sich die Stichprobenvarianz. Ebenso wie CRN setzt AV voraus, dass bei paarigen Replikationen die Zufallszahlen bzw. deren antithetische Gegenstücke zu dem jeweils selben Zweck verwendet werden. Außerdem muss ein monotoner Zusammenhang zwischen den Zufallszahlen und der Beobachtungsgröße vorliegen, da sonst die gewünschte negative Korrelation verloren geht (Kolonko 2008, S. 211 ff.; Bratley et al. 1983, S. 56 ff.).

### 3 Funktionalität ausgewählter Simulationswerkzeuge

Entscheidend für den Erfolg von VRT ist neben den Eigenschaften des untersuchten Systems auch das verwendete Simulationswerkzeug. Es muss einige grundlegende Anforderungen erfüllen:

1. Jeder stochastischen Eingangsgröße muss ein separater Zufallszahlenstrom zugewiesen werden können.
2. Die Zufallszahlenströme müssen geeignet verwaltet werden, z. B. sollte der Modellierer die Startwerte für die Zufallszahlenströme festlegen können.
3. Zum Einsatz von AV sind antithetische Zufallszahlen bereitzustellen.
4. Für AV muss die Transformationsfunktion, mit der Standardzufallszahlen in andere Verteilungen konvertiert werden, monoton sein (siehe Abschnitt 4.1).
5. Zudem ist eine Unterstützung bei der statistischen Auswertung antithetischer Simulationsläufe wünschenswert.

*Tabelle 1: Vergleich von Simulationswerkzeugen*

| Anforderung                            | Any-Logic 7 | Automod 12.6       | Enterprise Dynamics 10 | Plant Simulation 13 | Witness |
|--|-------------|--------------------|------------------------|---------------------|---------|
| Separate Zufallszahlenströme           | (nein)      | ja                 | ja                     | ja                  | ja      |
| Automatische Verwaltung der Ströme     | nein        | nur für Ressourcen | ja                     | nur für Bausteine   | nein    |
| Manuelle Verwaltung der Ströme         | (nein)      | ja                 | ja                     | ja                  | ja      |
| Erzeugung antithetischer Zufallszahlen | (nein)      | nein               | ja                     | ja                  | ja      |
| Auswertung antithetischer Läufe        | nein        | nein               | nein                   | nein                | nein    |

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Erfüllung der genannten Anforderungen in aktuellen Versionen häufig genutzter Simulationswerkzeuge. Alle betrachteten

Simulationswerkzeuge sind in der Lage, Zufallszahlenströme zu reproduzieren. Standardmäßig werden die Zufallszahlenströme beim Zurücksetzen des Modells wieder auf ihren ursprünglichen Startwert gesetzt, womit die Verwendung von CRN voreingestellt ist. Zudem können alle Simulationswerkzeuge Standardzufallszahlen in alle praxisrelevanten Verteilungen transformieren.

AnyLogic ist in Java geschrieben und nutzt die Klasse `java.util.Random` zum Erzeugen von Standardzufallszahlen (Borshchev 2013, S. 585 ff.). Standardmäßig verwendet AnyLogic für jede Zufallsgröße denselben Zufallszahlenstrom. Eine Unterstützung für AV existiert nicht. Allerdings erlaubt AnyLogic, die Klasse `Random` durch einen eigenen Zufallszahlengenerator zu ersetzen. Auf diesem Weg können sowohl separate Zufallszahlenströme als auch antithetische Zufallszahlen realisiert werden.

Die übrigen Simulationswerkzeuge unterstützen separate Zufallszahlenströme für die stochastischen Eingangsgrößen eines Modells. Die manuelle Verwaltung der Ströme ist in jedem Werkzeug möglich, eine zumindest teilautomatische Verwaltung bieten Automod, Enterprise Dynamics sowie Plant Simulation. Antithetische Zufallszahlen können von Enterprise Dynamics, Witness und Plant Simulation erzeugt werden. Allerdings bieten die Simulationswerkzeuge keine speziellen Funktionen zur statistischen Auswertung antithetischer Simulationsläufe. Im Rahmen dieses Beitrags wird Plant Simulation für die empirische Untersuchung verwendet. Daher soll im Folgenden auf die VRT-relevante Funktionalität dieses Simulationswerkzeugs genauer eingegangen werden.

Plant Simulation verfügt über einen integrierten Zufallszahlengenerator, der zwei MRG kombiniert. Zur Initialisierung der Zufallszahlenströme wird eine Kombination aus einem modellweit gültigen Startwert (Attribut `RandomNumbersVariant` des Ereignisverwalters) und einem objektspezifischen Startwert (Attribut `RandomSeed`) verwendet. Materialfluss- und Variablenbausteine besitzen damit jeweils einen eigenen Startwert. Auch beweglichen Elementen sind Zufallszahlenströme zugeordnet: Die Berechnung der Startwerte erfolgt auf Basis des Klassenattributes `RandomSeed` in Kombination mit der Instanznummer des beweglichen Elements. Für die Abbildung von Störungen von Materialflussbausteinen und beweglichen Elementen wird zusätzlich die Nummer des Störprofils zur Berechnung der Startwerte genutzt. Der Datentyp `RandTime`, der für nutzerdefinierte Attribute und Variablen verwendet werden kann, besitzt ebenfalls ein Attribut `RandomSeed`.

Rüst-, Bearbeitungs- und Erholzeit einer maschinellen Ressource werden in Plant Simulation aus einem einzigen Zufallszahlenstrom bedient. Das ist meist unproblematisch, da die benötigten Werte aus einem Zufallszahlenstrom immer in identischer Reihenfolge pro Baustein gezogen werden. Sollen dennoch unterschiedliche Zufallszahlenströme verwendet werden, so müssen die entsprechenden Zeiten durch Aufruf von SimTalk-Verteilungsfunktionen als Formel für die betrachtete Größe angegeben werden. Dies wäre beispielsweise für die Anwendung von CRN notwendig, wenn zwei Konfigurationen miteinander verglichen werden sollen, von denen eine konstante und die andere stochastische Rüstzeiten beinhaltet.

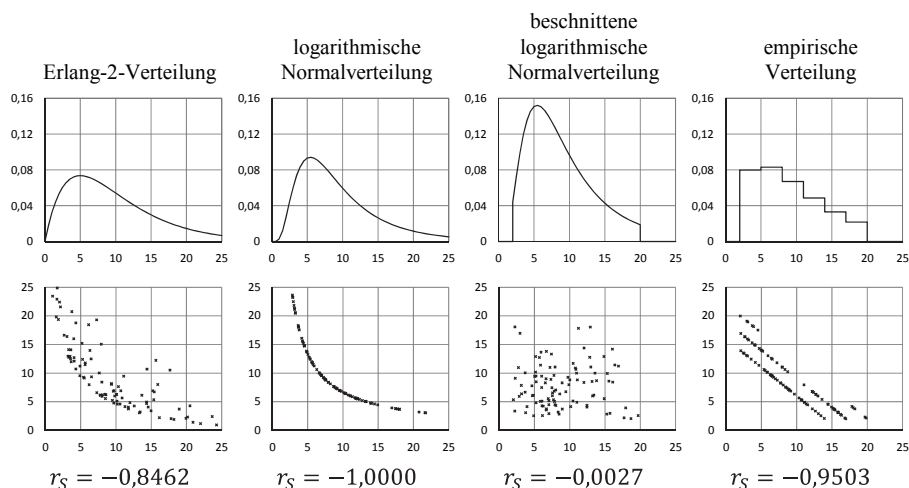
Die Werte der genannten `RandomSeed`-Attribute werden von Plant Simulation automatisch verwaltet, sodass jede Zufallsgröße standardmäßig einen eigenen Zufallszahlenstrom nutzt. Demgegenüber muss beim Aufruf einer Verteilungsfunktion in der Skriptsprache SimTalk die Nummer eines Zufallszahlenstroms als Parameter

angegeben werden. Der Modellierer muss darauf achten, dass jede Nummer eines Zufallszahlenstroms nur einmal verwendet wird. Wird beispielsweise eine Methode, die den Aufruf einer Verteilungsfunktion enthält, an verschiedenen Stellen im Simulationsmodell aufgerufen, ist sicherzustellen, dass die Stromnummer kontextabhängig festgelegt wird. Die zu den Strömen gehörenden Startwerte sind in einer zentralen Tabelle hinterlegt. Plant Simulation generiert automatisch für jede verwendete Stromnummer einen eigenen Startwert in dieser Tabelle, der bei Bedarf vom Modellierer überschrieben werden kann.

## 4 Empirische Untersuchung

### 4.1 Voruntersuchung

AV und CRN beruhen auf der Kontrolle der Zufallszahlen und ihrer Verwendung im Simulationsmodell. Da die meisten stochastischen Eingangsgrößen nicht gleichverteilt sind, müssen Standardzufallszahlen in andere Verteilungen transformiert werden. Insbesondere im Hinblick auf AV sind unterschiedliche Verteilungen in Plant Simulation keineswegs „gleichwertig“, wie Abbildung 1 illustriert: Die Diagramme der oberen Reihe zeigen die Dichtefunktionen von vier Verteilungen. Die Diagramme der unteren Reihe visualisieren jeweils 100 antithetische Zufallszahlenpaare, die für die entsprechende Verteilung generiert wurden.



**Abbildung 1:** Dichtefunktionen und Korrelation antithetischer Zufallszahlen

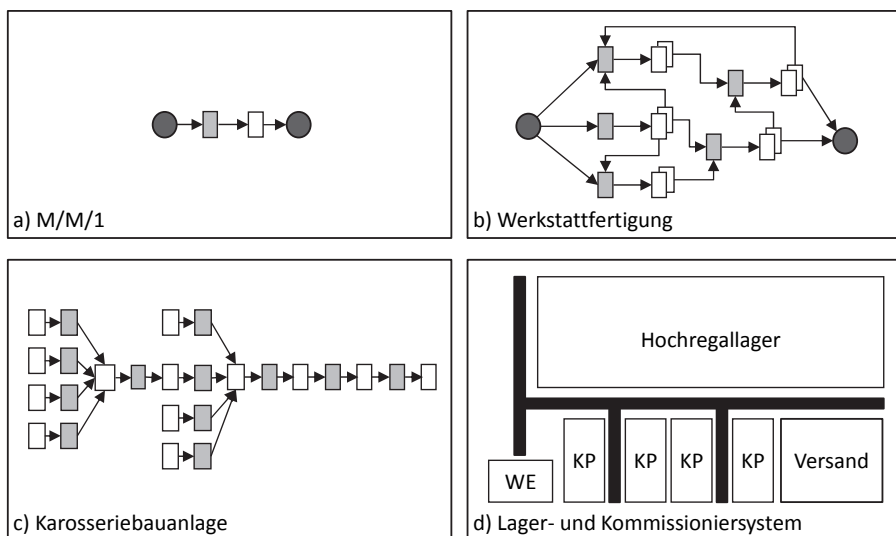
AV setzt voraus, dass antithetische Variablen negativ korreliert sind. Wie Abbildung 1 zeigt, ist es nicht für alle Verteilungen möglich, das mit hoher Güte zu realisieren. Zuerst wird die Erlang- $k$ -Verteilung betrachtet, die sich besonders zur Modellierung von Bearbeitungs- und Reparaturzeiten eignet. Für die 100 generierten Paare antithetischer Zufallszahlen beträgt der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman  $-0,8462$ , sodass ein Teil des Effektes, auf dem AV beruht, bereits bei der Erzeugung Erlang- $k$ -verteilter Zufallszahlen verlorengeht. Demgegenüber beträgt der Rang-

korrelationskoeffizient für antithetisch lognormalverteilte Zufallszahlen exakt  $-1,0$ , auch wenn der Zusammenhang klar nicht-linear ist. Wird die Verteilung durch untere und obere Schranken beschnitten – was in vielen Modellen erfolgt – sind die Zufallszahlenpaare praktisch gar nicht mehr korreliert. Ursache dafür ist die Tatsache, dass zum Erzeugen der antithetischen Zufallszahlen eine unterschiedliche Anzahl von Standardzufallszahlen verwendet wird. Damit geht die Synchronisation zwischen den antithetischen Simulationsläufen verloren und hohe Werte im ersten Lauf führen nicht mehr zwangsläufig zu niedrigen Werten im korrespondierenden Lauf. Von AV ist daher kein Nutzen zu erwarten. Für die empirische Verteilung sind antithetische Zufallszahlenpaare hingegen stark negativ korreliert.

## 4.2 Fallbeispiele

Die beiden VRT werden auf vier verschiedene Simulationsmodelle unterschiedlicher Komplexität angewandt (Abb. 2). Die Modelle repräsentieren

- ein einfaches Bedienungssystem vom Typ  $M/M/1$ ,
- eine Werkstattfertigung (Law 2007, S. 140 ff.),
- eine Karosseriebauanlage (Speickermann et al. 2000) sowie
- ein automatisiertes Lager- und Kommissioniersystem.



**Abbildung 2:** Schematische Darstellung des Layouts der vier Anwendungsbeispiele

Das erste Beispiel ist ein  $M/M/1$ -System (Gross et al. 2008, S. 53 ff.) mit einer mittleren Bedienungszeit von 8 min sowie einer mittleren Zwischenankunftszeit von 9 min bzw. 10 min. Beobachtungsgröße ist die mittlere Wartezeit. Zur Untersuchung von CRN werden jeweils 100 Simulationsläufe über einen Zeitraum von 24 Stunden für beide Konfigurationen durchgeführt, und zwar sowohl mit unabhängigen als auch mit gemeinsamen Zufallszahlen. Daraus resultieren jeweils 100 Differenzen der mittleren Wartezeit über den Simulationsraum. Durch CRN konnte die Standardabweichung dieser Differenz um 59,7 % reduziert werden. Um die Effizienz von AV

zu ermitteln, werden für beide Konfigurationen 100 unabhängige Simulationsläufe sowie 50 Paare antithetischer Läufe durchgeführt. Bei einer Zwischenankunftszeit von 9 min reduziert AV die Standardabweichung der Wartezeit um 41,2 %, bei einer Zwischenankunftszeit von 10 min um 37,0 %.

Das zweite Beispiel ist der Literatur entnommen (Law 2007, S. 140 ff.): Eine *Werkstatt* umfasst fünf Arbeitsstationen AS1, ..., AS5, die jeweils aus mehreren identischen Maschinen bestehen. Jede Arbeitsstation besitzt eine FIFO-Warteschlange unbeschränkter Kapazität. Produktionsaufträge treffen mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten in der Werkstatt ein. Es gibt drei Auftragsstypen mit spezifischen relativen Häufigkeiten und Arbeitsplänen. Im originalen Modell sind die Bearbeitungszeiten Erlang-2-verteilt. Aufgrund der in Abschnitt 4.1 dargelegten Ergebnisse wird zusätzlich eine Konfiguration mit logarithmisch normalverteilten Bearbeitungszeiten verwendet. Die Verteilungsparameter sind dabei so gewählt, dass die Erlang-2-Verteilung bestmöglich approximiert wird. Für die Werkstatt werden die beschriebene Konfiguration sowie fünf weitere Konfigurationen mit jeweils einer zusätzlichen Maschine in einer der Arbeitsstationen simuliert. Der Simulationszeitraum beträgt 365 Tage, die Anzahl der Replikationen 100. Beobachtungsgröße ist die mittlere Durchlaufzeit aller Aufträge. Für die Bearbeitungszeiten an den fünf Arbeitsstationen wird jeweils ein Zufallszahlenstrom verwendet. Zur Abbildung des Ankunftsprozesses könnte eine Quelle für alle Auftragsstypen benutzt werden. Das entspräche zwei Zufallszahlenströmen, von denen einer die Zwischenankunftszeiten und der andere den Auftragsstyp bestimmt. Dann wäre die Wirkung des zweiten Zufallszahlenstroms auf die Beobachtungsgröße Durchlaufzeit aber nicht mehr monoton. Deshalb wird für jeden Auftragsstyp eine eigene Quelle mit eigenem Zufallszahlenstrom zur Steuerung der Zwischenankunftszeiten verwendet. Tabelle 2 zeigt die mit CRN erzielte Varianzreduktion (prozentuale Verringerung der Breite des Paired-*t*-Konfidenzintervalls für die Verkürzung der mittleren Durchlaufzeit). In vier von fünf Fällen ist die Reduktion beträchtlich, im Fall einer zusätzlichen Maschine in AS2 jedoch gering bzw. sogar negativ: Durch die neue Maschine in AS2 verschiebt sich der Engpass der Werkstatt. Deshalb unterscheiden sich in dieser Konfiguration die Abarbeitungsreihenfolge der Aufträge und damit die Verwendung der Zufallszahlen deutlich von der Ausgangskonfiguration, was die geringe Wirksamkeit von CRN erklärt.

**Tabelle 2:** Varianzreduktion mit CRN für das Beispiel „Werkstattfertigung“

| Verteilung der Bearbeitungszeiten | AS1     | AS2     | AS3     | AS4     | AS5     |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| logarithmische Normalverteilung   | 87,26 % | -1,62 % | 87,57 % | 73,47 % | 86,90 % |
| Erlang-2-Verteilung               | 86,15 % | 8,94 %  | 88,94 % | 77,23 % | 85,22 % |

Zur Untersuchung der Wirkung von AV werden 200 unabhängige Simulationsläufe mit 100 Paaren antithetischer Läufe verglichen. Betrachtet wird die Ausgangskonfiguration des Systems. Bei logarithmisch normalverteilten Bearbeitungszeiten wird eine Varianzreduktion von 43,17 % erreicht, bei Erlang-2-verteiltern Bearbei-

tungszeiten eine Reduktion von 37,10 %. Analog zu den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1 eignet sich die Erlang-2-Verteilung auch hier weniger gut für AV als die logarithmische Normalverteilung.

Das dritte Beispiel, das von Spieckermann et al. (2000) ausführlich beschrieben wird, ist eine *Karosseriebauanlage* (Abb. 2). Die Bearbeitungszeiten werden hier als konstant und die Störungen als stochastisch angenommen. Beobachtungsgröße ist der Durchsatz der Anlage. Es werden zwei Experimente mit jeweils 500 Replikationen pro Konfiguration durchgeführt. Im ersten Experiment (Änderung des mittleren Störabstands in einem Block) liegt die Standardabweichung der Änderung des Karosseriedurchsatzes bei 7,09 Einheiten im Vergleich zu 20,35 Einheiten bei voneinander unabhängigen Simulationsläufen. Bezogen auf das Paired-*t*-Konfidenzintervall mit  $\alpha = 0,01$  kann so nach 12 Simulationsläufen ein signifikanter Unterschied in der Beobachtungsgröße „Durchsatz“ festgestellt werden, während diese Aussage ohne CRN erst nach 74 Läufen getroffen werden kann. Das Experiment zur Untersuchung von AV führt zu den in Tabelle 3 gezeigten Ergebnissen. Neben der Korrelation zwischen den Beobachtungsgrößen aus antithetischen Replikationen ist die erzielte Reduktion der Breite des Konfidenzintervalls für den mittleren Durchsatz angegeben. Wie die Ergebnisse der Voruntersuchung erwarten lassen, verhindert das Beschneiden der Erlang-*k*-Verteilung die Wirksamkeit von AV.

**Tabelle 3:** Varianzreduktion mit AV für das Beispiel „Karosseriebauanlage“

| Verteilung der Stördauern und Störabstände | Korrelationskoeffizient | Reduktion der Breite des Konfidenzintervalls |
|--|-------------------------|--|
| Erlang- <i>k</i> -Verteilung               | -0,24                   | 12,86 %                                      |
| beschnittene Erlang- <i>k</i> -Verteilung  | 0,04                    | -2,19 %                                      |
| empirische Verteilung                      | -0,21                   | 10,86 %                                      |

Das im vierten Beispiel betrachtete *Lager- und Kommissioniersystem* der Firma Hettich in Kirchlegern ist typisch für weitgehend automatisierte Ware-zum-Mann-Systeme. Die Bevorratung der Artikel erfolgt auf Paletten in einem Hochregallager. Neben Vollausslagerungen, die direkt dem Versandbereich zugeführt werden, sind Kundenaufträge an ortsfesten Kommissionierplätzen zu kommissionieren. Hierzu werden die sogenannten Zielpaletten an diesen Plätzen vorbereitet und die benötigten Quellpaletten aus dem Hochregallager sequentiell über ein Pull-System angefordert. Die Zeit für die Bearbeitung eines Kommissionierauftrags setzt sich aus mehreren dreiecksverteilten Zeitanteilen zusammen (Vorbereiten der Zielpalette, Picken pro Quellpalette, Fertigstellen der Zielpalette), wobei ein Auftrag in einzelnen Fällen über 100 Quellpaletten erfordern kann. Für die Bewertung des Einsatzes von VRT werden drei Ansätze zur Zuordnung von Zufallszahlenströmen zu den Zufallsgrößen betrachtet:

- a. Alle Kommissionierplätze nutzen denselben Zufallszahlenstrom.
- b. Jeder Kommissionierplatz erhält einen Zufallszahlenstrom.
- c. Jeder Kommissionierplatz erhält pro Tätigkeitstyp (Vorbereitung der Zielpalette, Picken, Abschluss der Zielpalette) einen Zufallszahlenstrom.



Untersucht werden zwei Systemkonfigurationen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Kommissionierplätzen. Unterschiede in der Beobachtungsgröße „Durchsatz an Zielpaletten“ sind bereits für sehr wenige unabhängige Simulationsläufe nachweisbar (Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,01$ ). Die empirische Standardabweichung der Differenz des Palettendurchsatzes lässt sich durch Nutzung von CRN für den Fall b) in Relation zu Fall a) nicht verringern. Nur im Vergleich von Fall c) zu Fall a) ergibt sich ein positiver Effekt, wobei sich die Standardabweichung um 13,9 % reduziert. Auch für AV können in den Fällen a) und b) keine signifikanten positiven Effekte festgestellt werden: Für den Fall b) liegt der Korrelationskoeffizient lediglich bei -0,012 bei 500 Beobachtungspaaren. Der Korrelationskoeffizient für den Fall c) ist mit einem Wert von -0,09 betragsmäßig etwas höher, womit sich die Anzahl notwendiger Simulationsläufe aber nur geringfügig reduzieren lässt.

## 5 Zusammenfassung und Hinweise für die Modellierung

Zusammenfassend zeigt Tabelle 4 einige Ergebnisse, die mit den beiden VRT erzielt wurden. Als Maß für die Varianzreduktion wird für CRN die prozentuale Verringerung der Breite des Paired-*t*-Konfidenzintervalls und bei AV die prozentuale Verringerung der Standardabweichung der Ausgangsgröße verwendet. Für AV wird außerdem der Korrelationskoeffizient der Beobachtungsgröße für die korrespondierenden Folgen antithetischer Simulationsläufe angegeben.

*Tabelle 4: Empirische Ergebnisse*

|                                   | CRN<br>Varianzreduktion | AV<br>Korrelation | AV<br>Varianzreduktion |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------|------------------------|
| MM/1-System                       | 59,7 %                  | -0,42             | 41,20 %                |
| Werkstattfertigung                | 87,3 %                  | -0,40             | 86,15 %                |
| Karosseriebauanlage               | 65,2 %                  | -0,24             | 12,86 %                |
| Lager- und<br>Kommissioniersystem | 13,9 %                  | -0,09             | 4,70 %                 |

Tendenziell kommen die Effekte der VRT umso weniger zum Tragen, je komplexer das Simulationsmodell ist: In den ersten drei Modellen belegen die Aufträge in allen Simulationsläufen stets dieselben Arbeitsstationen, was die synchrone Nutzung der Zufallszahlen in unterschiedlichen Läufen erleichtert. Das letzte, komplexeste Beispiel besitzt diese Eigenschaft nicht, was zur geringeren Effizienz der VRT führt.

Zusammenfassend lassen sich folgende Modellierungshinweise geben:

1. CRN sollte grundsätzlich angewendet werden.
2. Jede Zufallsgröße sollte einen eigenen Zufallszahlenstrom erhalten. In einigen Fällen erfordert dies Eingriffe in die Standardimplementierung von Simulationsbausteinen (siehe Abschnitt 3). Besondere Vorsicht ist bei objektorientierten Modellierungsansätzen geboten: Abgeleitete Klassen und Instanzen, z. B. von Bausteinen, müssen jeweils eigene Zufallszahlenströme erhalten.

3. Für AV sollten bevorzugt Verteilungen verwendet werden, bei denen die negative Korrelation zwischen Paaren antithetischer Zufallszahlen betragsmäßig groß ist (siehe Abschnitt 4 zur Erlang- $k$ -Verteilung).
4. Das Beschneiden von theoretischen Verteilungen sollte für den Einsatz von AV vermieden werden. Gegebenenfalls können beschnittene Verteilungen durch empirische Verteilungen approximiert werden (siehe Abschnitt 4.2).

Die meisten aktuellen Simulationswerkzeuge unterstützen den Einsatz von CRN sehr gut, den von AV nur eingeschränkt. Der Modellierer muss selbst dafür Sorge tragen, dass das Simulationsmodell die für die VRT erforderlichen strukturellen Eigenschaften besitzt. Dazu benötigt er sowohl ein grundlegendes Verständnis der VRT als auch fundiertes Wissen über relevante Implementierungsdetails des Simulationswerkzeugs, insbesondere über den Umgang mit Zufallszahlenströmen und deren Verwendung.

## Literatur

- Adegunmi, A.: Selection of simulation variance reduction techniques through a fuzzy expert system. PhD thesis, University of Nottingham, 2010.
- Borshchev, A.: The Big Book of Simulation Modeling: Multimethod Modeling with AnyLogic 6. AnyLogic North America, 2013.
- Bratley, P.; Fox, B. L.; Schrage, L.: A Guide to Simulation. New York: Springer 1983.
- Cole, G.P.; Johnson, A.W.; Miller, J.O.: Feasibility Study of Variance Reduction in the Logistics Composite Model. In: Henderson, S.G.; Biller, B.; Hsieh, M.-H.; Shortle, J.; Tew, J.D.; Barton, R.R.: Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference, 2007, S. 1410-1416.
- Gross, D.; Shortle, J.F.; Thompson, J.M.; Harris, C.M.: Fundamentals of Queueing Theory. 4th ed., Hoboken: Wiley 2008.
- Hedderich, J.; Sachs, L.: Angewandte Statistik: Methodensammlung mit R. 15. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum 2016.
- Kolonko, M.: Stochastische Simulation: Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner 2008.
- Law, A.M.: Simulation Modeling and Analysis. 4th ed., Boston: MacGraw Hill 2007.
- L'Ecuyer, P.: Tables of Linear Congruential Generators of Different Sizes and good lattice structure. Mathematics of Computation 68 (1999) 225, S. 249-260.
- L'Ecuyer, P.; Granger-Piché, J.: Combined generators with components from different families. Mathematics and Computers in Simulation 62 (2003) 3-6, S. 395-404.
- Spieckermann, S.; Gutenschwager, K.; Heinzl, H.; Voß, S.: Simulation-based Optimization in the Automotive Industry – A Case Study on Body Shop Design. Simulation 75 (2000) 5, S. 276-286.
- Ünlü, Y.; Rossetti, M.D.: Evaluating Variance Reduction Techniques within a Sample Average Approximation Method for a Constrained Inventory Policy Optimization Problem. In: Jain, S.; Creasey, R.R.; Himmelpach, J.; White, K.P.; Fu, M.: Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference, 2011, S. 1629-1640.